

Hier folgt die exakte Berechnung des Wertes der Gewinnwahrscheinlichkeit; diese hat allerdings einen erheblichen Schwierigkeitsgrad.

Wir beginnen mit der Feststellung, dass nicht 8 sondern eigentlich nur 4 verschiedene Fälle auftreten können (der jeweils andere Fall ergibt sich durch die Ersetzung $R \leftrightarrow S$).

Fall	Wahl des Mannes	Wahl des Teufels	des Teufels Gewinnchance
1	RRR	SRR	$\frac{7}{8}$
2	RRS	SRR	$\frac{3}{4}$
3	RSS	RRS	$\frac{2}{3}$
4	RSR	RRS	$\frac{2}{3}$
5	SRS	SSR	$\frac{2}{3}$
6	SRR	SSR	$\frac{2}{3}$
7	SSR	RSS	$\frac{3}{4}$
8	SSS	RSS	$\frac{7}{8}$

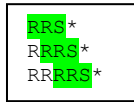
Der Fall 1 (und 8)

Der Mann kann nur gewinnen, wenn seine Kombination **gleich zu Beginn** erscheint (RRR). Um das zu beweisen, stelle man sich vor, er würde nicht zu Beginn mit RRR gewinnen und die Kombination RRR begägne an einer Position $n > 1$. Dann müsste an der Stelle $n-1$ ein S erscheinen. Damit hätte der Teufel aber bereits beim zweiten R gewonnen. Damit kann der Mann aber nicht mehr gewinnen, wenn die Folge nicht mit R beginnt. Insgesamt gewinnt der Mann damit bei einer Folge von N Spielen lediglich in 2^{N-3} Fällen. Der Teufel hingegen gewinnt in allen anderen Fällen, in denen seine Kombination erscheint. Bei hinreichend langer Spieldauer erscheint diese sicher und somit gewinnt der Teufel in ALLEN anderen Fällen. Die Gewinnchance des Mannes ist nach Laplace (Anzahl der günstigen durch Anzahl der möglichen Fälle) $p(M) = \frac{2^{N-3}}{2^N} = \frac{1}{8}$, die des Teufels $p(T) = 1 - p(M) = \frac{7}{8}$.

Der Fall 2 (und 7)

Der Mann kann zum einen gewinnen, wenn **gleich zu Beginn** die Kombination RRS erscheint – also bei N Spielen in 2^{N-3} Fällen. **Erscheint diese Kombination nicht zu Beginn**, muss für einen Sieg des Mannes irgendwann einmal die Kombination RR erscheinen (was bei hinreichend langer Spieldauer immer geschieht) und **anschließend** ein S kom-

men, ohne dass **vor** den beiden R's ein S gekommen wäre (siehe Übersicht rechts). Das bedeutet aber, dass vorher **nur** R's gekommen sein müssen, denn sonst hätte der Teufel vorher bereits gewonnen. Wie viele Spiele sind das insgesamt? Nun, man stelle sich vor, man mache N Spiele:



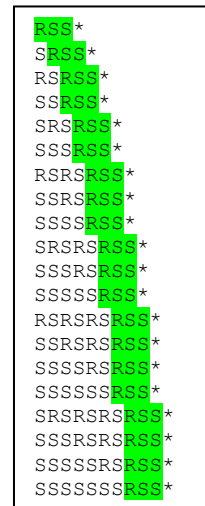
Wenn die Gewinnfolge des Mannes im 2. Spiel beginnt, muss die Reihe mit RRRS begonnen haben; was danach kommt, spielt keine Rolle mehr. Die Anzahl aller Spiele, für die das gilt, ist 2^{N-4} . Beginnt sie ab dem 3. Spiel, fängt die Reihe mit RRRRS an; das sind 2^{N-5} Spiele, usw. Insgesamt ergeben sich unter Verwendung der Formel für die geometrische Reihe die Anzahl aller Spiele, in denen der Mann gewinnt:

$$\sum_{k=1}^{N-2} 2^{N-(k+2)} = \sum_{k=0}^{N-3} 2^{N-(k+3)} = 2^{N-3} \cdot \sum_{k=0}^{N-3} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 2^{N-3} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{N-2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2^{N-3} - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 2^{N-2} - 1$$

Die Gewinnchance des Mannes ist somit $p(M) = \frac{2^{N-2}-1}{2^N} = \frac{1}{4} - 2^{-N}$. Für beliebig lange Folgen wird 2^{-N} immer kleiner und die Gewinnwahrscheinlichkeit des Mannes geht gegen $p(M) = \frac{1}{4}$, die des Teufels gegen $p(T) = 1 - p(M) = \frac{3}{4}$.

Der Fall 3 (und 6)

Der Mann gewinnt, wenn seine Folge mit RSS beginnt. Tut sie dies nicht, kann die Gewinnfolge des Mannes im 2. Spiel nur zum Erfolg führen, wenn im 1. Spiel kein R kam. Soll die Gewinnfolge des Mannes im 3. Spiel einsetzen, muss vorher RS oder SS beginnen. Die nebenstehende Übersicht über die möglichen, den Mann gewinnen lassenden Folgen, lässt das System erkennen.



Beginnt die Gewinnkombination an der 1. oder 2. Stelle, gibt es eine, beginnt sie an der 3. oder 4. Stelle, gibt es zwei, beginnt sie an der 5. oder 6. Stelle, gibt es drei „Gewinnfolgen“. Verallgemeinert bedeutet das: Beginnt die Gewinnkombination an der Stelle $2k$ oder $2k-1$, gibt es k „Gewinnfolgen“. Das müssen wir nur noch zusammenzählen. Sei zuerst N gerade:

$$\sum_{k=1}^{\frac{1}{2}N-1} \left(k \cdot 2^{N-(2k-1+2)} + k \cdot 2^{N-(2k+2)} \right) = 3 \cdot 2^{N-2} \cdot \sum_{k=1}^{\frac{1}{2}N-1} k \cdot 4^{-k} = 3 \cdot 2^{N-2} \cdot \left(\frac{4}{9} - \frac{3N+2}{9 \cdot 2^{N-1}} \right) = \frac{1}{3} \cdot \left(2^N - \frac{3N+2}{2} \right)$$

Die Vereinfachung der letzten Summe erfolgte mit DERIVE. Ist N ungerade, nimmt man den obigen Term, ersetzt dort N durch N-1, verdoppelt das Ergebnis (weil man ja jedes

Mal im Vergleich zu der um eins längeren Folge die Variationsmöglichkeit R/S hat und addiert noch $\frac{N+1}{2}$. Man erhält für diesen Fall

$$2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(2^{N-1} - \frac{3(N-1)+2}{2} \right) + \frac{N+1}{2} = \frac{1}{3} \cdot \left(2^N - \frac{9N+1}{2} \right)$$

Für die Gewinnwahrscheinlichkeit des Mannes ergibt sich:

$$p(M) = \begin{cases} \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{3N+2}{2^{N+1}} \right), & \text{falls } N \text{ gerade} \\ \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{9N+1}{2^{N+1}} \right), & \text{falls } N \text{ ungerade} \end{cases}$$

Interessant ist jetzt allerdings nur der Fall, dass man beliebig lange Spiele spielt, man also N gegen unendlich gehen lässt. Man erhält schließlich $p(M) = \frac{1}{3}$ und als Gewinnwahrscheinlichkeit des Teufels $p(T) = 1 - p(M) = \frac{2}{3}$.

Der Fall 4 (und 5)

Dieser Fall ist der komplizierteste. Günstig ist es hier, zu zählen, wie viele Möglichkeiten jeweils zu einem vorzeitigen Gewinn **des Teufels** führen. Sei a_n die Anzahl der möglichen Kombinationen **vor** dem Auftreten der Wahl des Teufels RRS an der n . Stelle. Wir werden versuchen, ein **rekursives** Bildungsgesetz dieser Folge zu bestimmen.

Zuerst stellen wir fest: Alle Möglichkeiten, die für $k-1$ auftreten, findet man für k mit einem vorangestellten S wieder (das Hinzufügen eines S lässt den Mann in keinem Fall gewinnen). Außerdem treten diejenigen Kombinationen mit einem vorangestellten R auf, die mit einer der „Doppelfolgen“ SS oder RR begonnen haben.

Sei a_k die gesamte Anzahl der Kombinationen vor einem Auftreten der Folge RRS an k . Stelle, s_k die Anzahl der Kombinationen, die mit einem S beginnen und d_k die Anzahl der Kombinationen, die mit SS oder RR beginnen, dann gilt für $k > 2$:

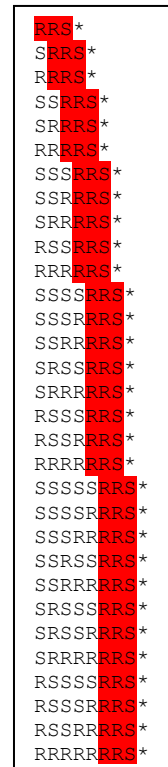
$$a_k = s_{k+1}$$

$$d_k = s_{k-1} + 1 \quad (\text{nur die Kombination RR...R ist eine mit R beginnende Doppelfolge})$$

$$a_k = s_k + d_{k-1}$$

Damit bekommt man die Rekursionsgleichung für die a_k

$$a_k = s_k + s_{k-2} + 1 = a_{k-1} + a_{k-3} + 1$$



Leider kann man nicht so einfach eine explizite Darstellung dieser Formel gewinnen [Theorie der linearen, inhomogenen Differenzgleichungen 3. Ordnung], wie müssen daher mit dieser rekursiven Darstellung arbeiten.

Die Anzahl der für den Teufel günstigen Kombinationen bei einer Folge von $N > 3$ gespielten Spielen ergibt sich zu

$$2^{N-3} + 2 \cdot 2^{N-4} + \sum_{k=3}^{N-2} a_k \cdot 2^{N-(k+2)}$$

Seine Gewinnwahrscheinlichkeit ist dann

$$p(T) = \frac{1}{2^N} \left(2^{N-3} + 2 \cdot 2^{N-4} + \sum_{k=3}^{N-2} a_k \cdot 2^{N-(k+2)} \right) = \frac{1}{4} \left(1 + \sum_{k=3}^{N-2} \frac{a_k}{2^k} \right)$$

Um den Grenzwert für N gegen unendlich zu bestimmen, verwenden wir DERIVE. Wegen der rekursiven Darstellung von a_k lässt sich dieser nicht analytisch berechnen. Einsetzen verschiedener Werte (für $N=40$ ist z.B. $p(T) \approx 0,666660005$) für N nähert die Vermutung

$$p(T) = \frac{2}{3}.$$

Anhang: Tabelle der Werte von a_k bzw. der Wahrscheinlichkeiten $p(T)$

k	a_k	N	$p(T)$
3	3	3	0,125
4	5	4	0,25
5	8	5	0,34375
6	12	6	0,421875
7	18	7	0,484375
8	27	8	0,53125
9	40	9	0,56640625
10	59	10	0,5927734375
11	87	11	0,6123046875
12	128	12	0,6267089843
13	188	13	0,6373291015
14	276	14	0,6451416015
15	405	15	0,6508789062
16	594	16	0,6550903320
17	871	17	0,6581802368
18	1277	18	0,6604461669
19	1872	19	0,6621074676
20	2744	20	0,6633253097