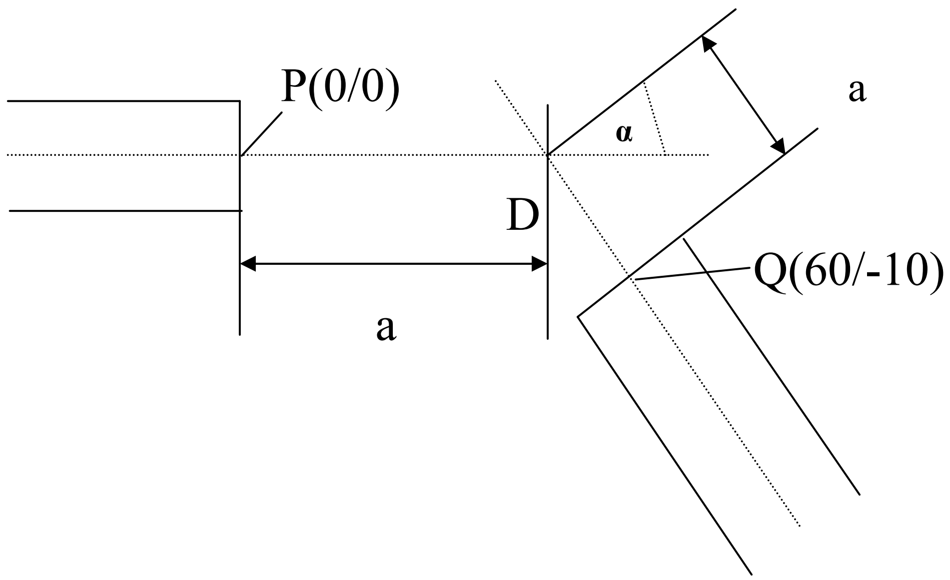
Projekt: „Trassenführung im Straßenbau“

Thema der Unterrichtseinheit war die mathematische Darstellung und Optimierung von Straßenabschnitten. Ziel war dabei nicht nur die möglichen Kosten gering zu halten, sondern auch eine optimale Befahrbarkeit zu gewährleisten.

Unsere Gruppe befasste sich dabei explizit mit dem folgenden Beispiel:

Verbindung zwischen zwei Anschlussstücken, die <u>in einem beliebigen Winkel</u> zueinander stehen.



Als wir uns mit dem Problem befassten, merkten wir jedoch schnell, dass eine allgemeine Lösung viel zu kompliziert ist und den Rahmen eines jeden Plakates sprengen würde. Daher haben wir zur Darstellung zwei Beispiele gewählt, an denen das Vorgehen deutlich werden soll.

Für beide Beispiele soll α=45° und a=50m sein. Im Koordinatensystem erhalten wir dadurch für P(0/0) den Punkt Q(60/-10) mit b=14.142m.

1. Ein Polynom 5. Grades

Die Vorgehensweise bei diesem Lösungsweg ist denkbar einfach. Man stellt alle Bedingungen auf, die das modellierte Straßenstück erfüllen soll und lässt sich mit Hilfe des Computer-Algebra-Systems DERIVE eine Funktionsgleichung berechnen.

Diese Bedingungen waren in unserem Fall:

- Der Anschluss soll stetig in Steigung und Krümmung sein, um ruckartige Lenkbewegungen zu vermeiden.
- Die Krümmung soll die ganze Kurve über möglichst gering gehalten werden. Insbesondere die maximale Krümmung darf einen bestimmten Wert nicht überschreiten, damit das Straßenstück überhaupt durchfahrbar ist.
- Die Länge des Streckenabschnitts soll möglichst klein sein, um die Kosten der Trasse klein zu halten.

Mathematisch heißt das:

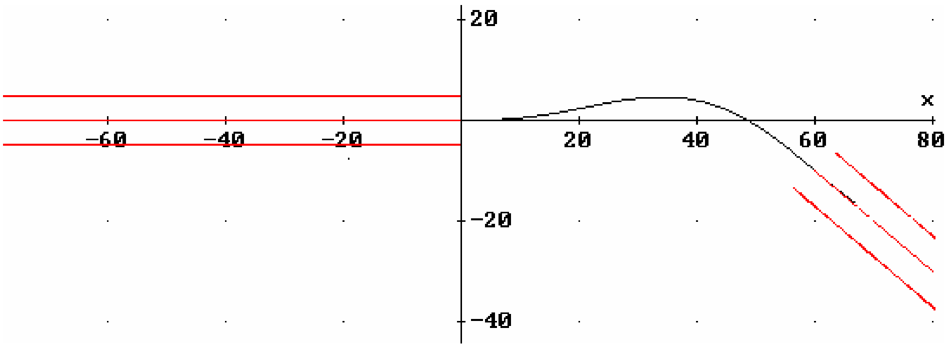
$f(0)=0$	$f'(0)=0$	$f''(0)=0$
$f(60)=(-10)$	$f'(60)=(-1)$	$f''(60)=0$

Um diese sechs Bedingungen unterzubringen, brauchen wir mindestens ein Polynom fünften Grades. Sprich:

$$f(x) = a_5 \cdot x^5 + a_4 \cdot x^4 + a_3 \cdot x^3 + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0$$

Wenn wir diese Gleichung nun anhand der obigen Bedingungen nach a_5, a_4, a_3, a_2, a_1 und a_0 auflösen, erhalten wir unser Polynom, das in etwa so aussieht:

$$f(x) = 1.543 \cdot 10^{-7} \cdot x^5 - 2.083 \cdot 10^{-5} \cdot x^4 + 0.0006481 \cdot x^3$$



Lässt man sich diesen Graph nun zeichnen, merkt man allerdings schnell, dass er NICHT die optimale Lösung sein kann, da er erst einen Bogen nach oben macht um dann schließlich verhältnismäßig abrupt nach unten abzuknicken.

Dieser kleine Umweg lässt sich dadurch erklären, dass Polynome höheren Grades eher dazu neigen große Schwingungen zu machen, was bei unserem Problem natürlich kontraproduktiv ist. Dies äußert sich auch in einer möglichen Preiskalkulation für ein solches Straßenstück: Unsere Beispielstraße mit einer Bogenlänge von ca. 65m und einer Breite von 5m hätte also einen Flächeninhalt von ca. 325 m². Bei durchschnittlichen Kosten von 100€/m² zahlt man für unser Straßenstück also 32500 €. Der minimale Kurvenradius beträgt etwa 23m, die Kurve ist also schon ziemlich eng!

2. Ein Polynom 4. Grades

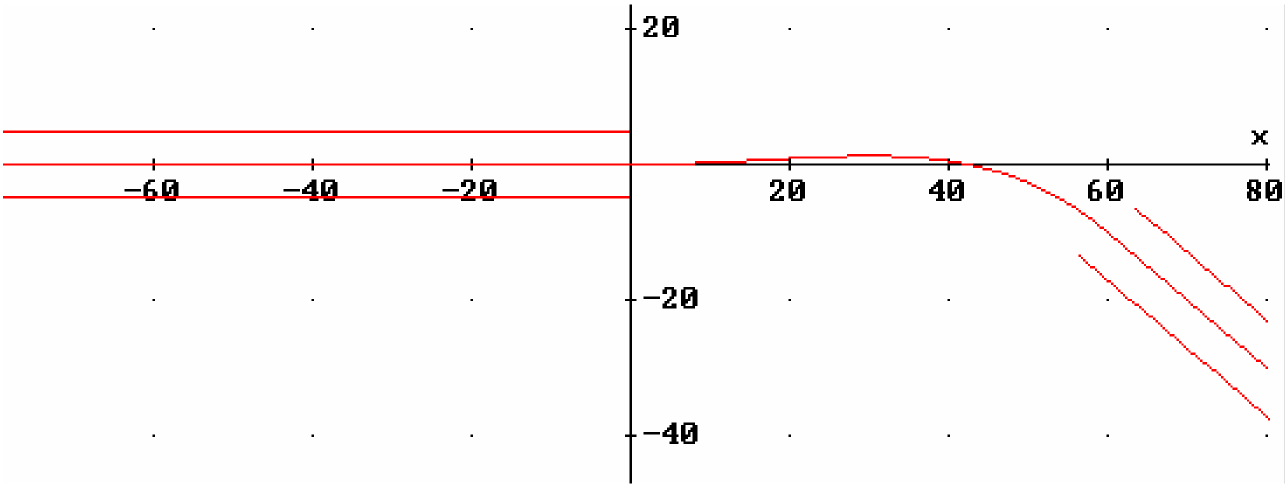
Beim zweiten Weg hingegen haben wir überlegt, ob wir keine Funktion kennen, die den problematisierten Weg besser beschreibt. Eingefallen ist uns nach minutenlangem Grübeln eine zur y-Achse symmetrische Funktion 4. Grades, die in etwa so aussehen müsste.

$$g(x) = a_4 \cdot x^4 + a_2 \cdot x^2$$

Dabei lassen die Koeffizienten a_4 und a_2 die Möglichkeit, den Graphen so zu strecken, dass er mit geeigneter Steigung durch den Anschlusspunkt B(60/-10) verläuft.

Mit DERIVE ergibt sich:

$g(x) = - 1/648000 \cdot x^4 + 1/360 \cdot x^2$



Dieses Ergebnis kam unserer Idealvorstellung einer solchen Kurve schon viel näher. Der minimale Kurvenradius beträgt etwa 34m, die Bogenlänge beträgt 63m, so dass die Kosten für die Straße 1000€ niedriger liegen als im ersten Beispiel. Jedoch ändert sich die Krümmung in diesem Fall in den Anschlusspunkten sprungartig.

Ein weiteres Problem stellen die Fliehkräfte dar.

Mit wie viel km/h kann man eine solche Beispielkurve befahren, ohne dass das Auto gleich aus der Kurve fliegt?

Dazu greifen wir zur Physik:

Jedes Fahrzeug erfährt beim Durchfahren einer Kurve eine Kraft nach außen, die sog. Zentrifugal- oder Fliehkraft.

$$F = m * v^2 / r$$

Die dazugehörige Beschleunigung, die Zentrifugal- oder Querbeschleunigung

$$a = v^2 / r$$

ist nur von zwei Größen abhängig: Der Geschwindigkeit des Objekts und dem Radius der Kurve. Der minimale Kurvenradius ist durch die maximale Krümmung der Kurve festgelegt; er legt die maximale Geschwindigkeit fest, mit der die Kurve durchfahren werden kann. Ein durchschnittlicher Autofahrer erfährt eine Querbeschleunigung von ca. 4 m/s²; ab ca. 6.5 m/s² lässt sich selbst bei optimalen Straßenverhältnissen ein Auto nicht mehr sicher durch eine Kurve lenken. Durch Einsetzen in unsere Formel für die Querbeschleunigung erhalten wir damit Maximalwerte für die Geschwindigkeit: von 44 km/h im ersten und 53.5 km/h im zweiten Fall.

Erstellt von Michael Küste, Roman Laabs und Wim Drozak