

Trassenführung beim Straßenbau

Das Problem:

Es sind zwei rechtwinklig zueinander stehende Anschlussstücke so zu verbinden, dass die maximale Krümmung möglichst klein und damit der Kurvenradius möglichst groß ist, um die Kurve möglichst schnell durchfahren zu können. Die Bogenlänge soll ebenfalls möglichst klein sein, um Baukosten zu sparen.

Die zu verbindenden Teilstücke wurden so definiert:

Anschlussstück 1: $f(x) = -2x + 70$

Anschlussstück 2: $g(x) = 0,5x + 50$

Die Nullstellen liegen dann bei der Funktion f bei 35 und bei der Funktion g bei -100.

Als nächstes sollen die beiden Teilstücke mit drei verschiedenen Polynomen verbunden und diese auf ihre Vor- und Nachteile hin verglichen werden.

1. Problemlösung mit Hilfe eines Polynoms 3. Grades:

Um eine eindeutige Funktion p_3 zu erhalten, müssen vier Bedingungen festgelegt werden:

$$p_3(-100) = 0 \quad p_3(35) = 0 \quad p_3'(-100) = 0,5 \quad p_3'(35) = -2$$

Daraus ergibt sich die eindeutige Funktionsgleichung für p_3

$$p_3(x) = -\frac{1}{12150}x^3 - \frac{7}{405}x^2 - \frac{79}{162}x + \frac{10150}{243}$$

Untersucht man diese Funktion nun auf Krümmung und Bogenlänge, erhält man folgende Ergebnisse:

Bogenlänge:	169m
Maximale Krümmung:	0,02846m⁻¹
Minimaler Kurvenradius:	35m

2. Problemlösung mit Hilfe eines Polynoms 4. Grades:

Um auch hier ein eindeutiges Ergebnis zu erhalten, müssen wir hier fünf Bedingungen festlegen. Da wir nur vier in Abhängigkeit

unserer Verbindungsstrecken brauchen, nehmen wir uns nun eine beliebige dazu, die nicht in Zusammenhang mit den Teilstücken steht (grau hinterlegt).

$$\begin{array}{lll}
 p_4(-100)=0 & p_4(35)=0 & p_4'(-100)=0,5 \\
 p_4'(35)=-2 & p_4(-200)=0 &
 \end{array}$$

daraus ergibt sich für p_4 folgende Funktionsgleichung:

$$p_4(x) = -\frac{11}{57105000} x^4 - \frac{613}{5710500} x^3 - \frac{1417}{84600} x^2 - \frac{9137}{22842} x + \frac{450100}{11421}$$

Untersucht man diese Funktion ebenfalls auf maximale Krümmung und die Bogenlänge, erhält man hier folgende Werte:

Bogenlänge:	165m
Maximale Krümmung:	0,02788m⁻¹
Minimaler Kurvenradius:	36m

3. Problemlösung mit Hilfe eines Polynoms 5. Grades:

Hier sind nun sechs Bedingungen notwendig, um eine eindeutige Funktion p_5 zu erhalten.

$$\begin{array}{lll}
 p_5(-100)=0 & p_5(35)=0 & p_5'(-100)=0,5 \\
 p_5'(35)=-2 & p_5(-200)=0 & p_5'(-200)=-3
 \end{array}$$

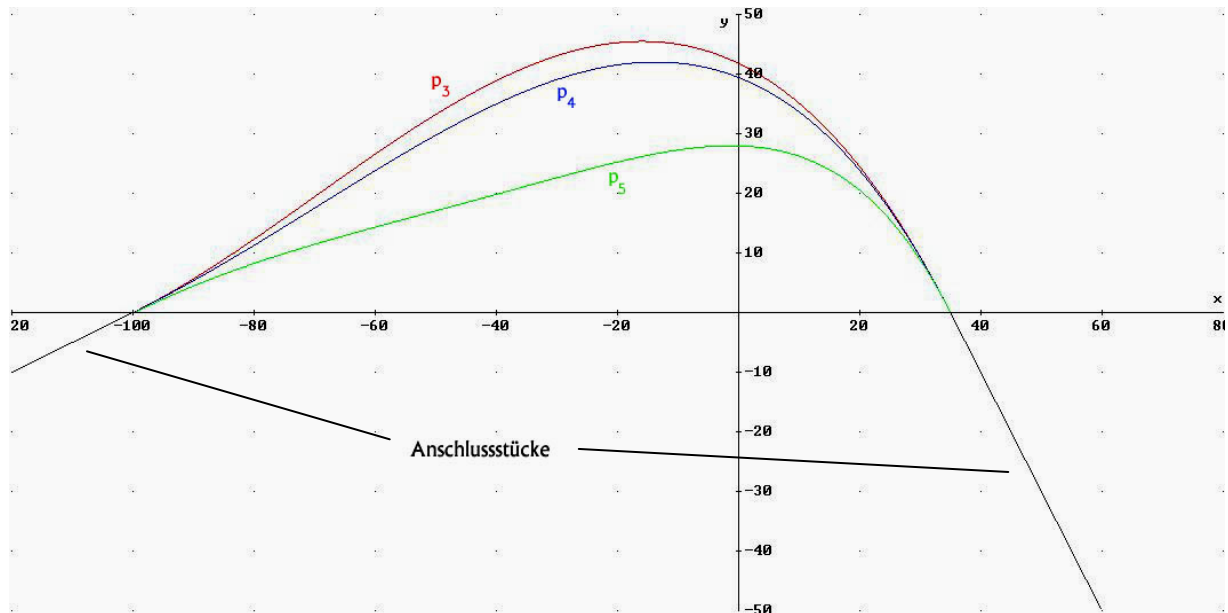
Für die Funktion p_5 ergibt sich folgende Funktionsgleichung:

$$\begin{aligned}
 p_5(x) = & -\frac{251}{53678700000} x^5 - \frac{9317}{5367870000} x^4 - \frac{463367}{2147148000} x^3 \\
 & - \frac{463367}{2147148000} x^3 - \frac{1291153}{107357400} x^2 - \frac{17057}{536787} x + \frac{15005200}{536787}
 \end{aligned}$$

Berechnet man auch hier die maximale Krümmung und die Bogenlänge, ergibt sich Folgendes:

Bogenlänge:	152m
Maximale Krümmung:	0,03332m⁻¹
Minimaler Kurvenradius:	30m

Die Ergebnisse im Überblick:



	p_3	p_4	p_5
Bogenlänge	169m	165m	152m
Radius	35m	36m	30m

Die Polynome p_3 und p_4 unterscheiden sich hinsichtlich der Bogenlänge nicht wesentlich. Auch der Kurvenradius ist kaum unterschiedlich. p_5 dagegen zeigt sich ganz anders. Die geringste Bogenlänge dieses Polynoms erkaufte man sich mit dem kleinsten Kurvenradius, der die Maximalgeschwindigkeit schmälert.

Erstellt von:

Jennifer Januszewski, Manuel Kotlarski und Christian Oertel

Alle Rechnungen wurden mit dem Computer-Algebra-System DERIVE durchgeführt.