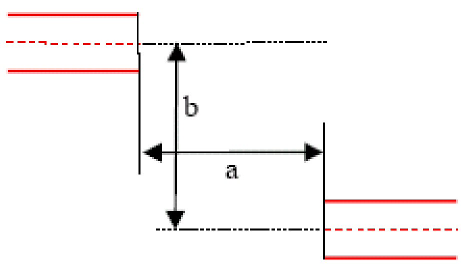
Trassenführung beim Straßenbau

Das Problem:

Gegeben sind zwei parallel versetzte Straßen, die durch eine Kurve verbunden werden sollen. Die Kurve soll dabei folgende Voraussetzungen erfüllen:

- Sie muss stetig in Steigung und Krümmung sein, d.h. dass man nicht einfach eine Gerade als Verbindung benutzen kann.
- Die maximale Krümmung soll so gering wie möglich sein um eine möglichst hohe Geschwindigkeit zuzulassen.
- Die Länge der Kurve sollte möglichst klein sein um Baukosten zu sparen.

Grafisch sieht das ganze Problem so aus:



Lösungsansatz:

Wir betrachten zunächst eine Straße der Breite 0m. So müssen wir nur noch eine Funktion finden, die die beiden Anschlussstellen verbindet. Dabei benennen wir die Anschlusspunkte A und B, wobei wir vereinfacht den Fall betrachten, dass A im Koordinatenursprung liegt. Ist dies nicht der Fall so werden die Geraden so verschoben, dass die Abstände a und b erhalten bleiben und A um Ursprung liegt.

Lösungsweg:

Um alle gegebenen Vorraussetzungen zu erfüllen benutzen wir als Verbindungskurve ein Polynom 5. Grades. Nur so gibt es bei erfüllten Anforderungen für alle a,b mit $a \neq 0$ eindeutige Lösungen.

Die allgemeine Funktionsvorschrift der Verbindungsfunktion f lautet dann:

$$f(x, a, b) := \frac{6 \cdot b}{a^5} \cdot x^5 - \frac{15 \cdot b}{a^4} \cdot x^4 + \frac{10 \cdot b}{a^3} \cdot x^3$$

Die Krümmung dieser Funktion an der Stelle x beträgt dann:

$$K(x, a, b) := \frac{|f''(x, a, b)|}{\sqrt{\left(1 + f'(x, a, b)^2\right)^3}}$$

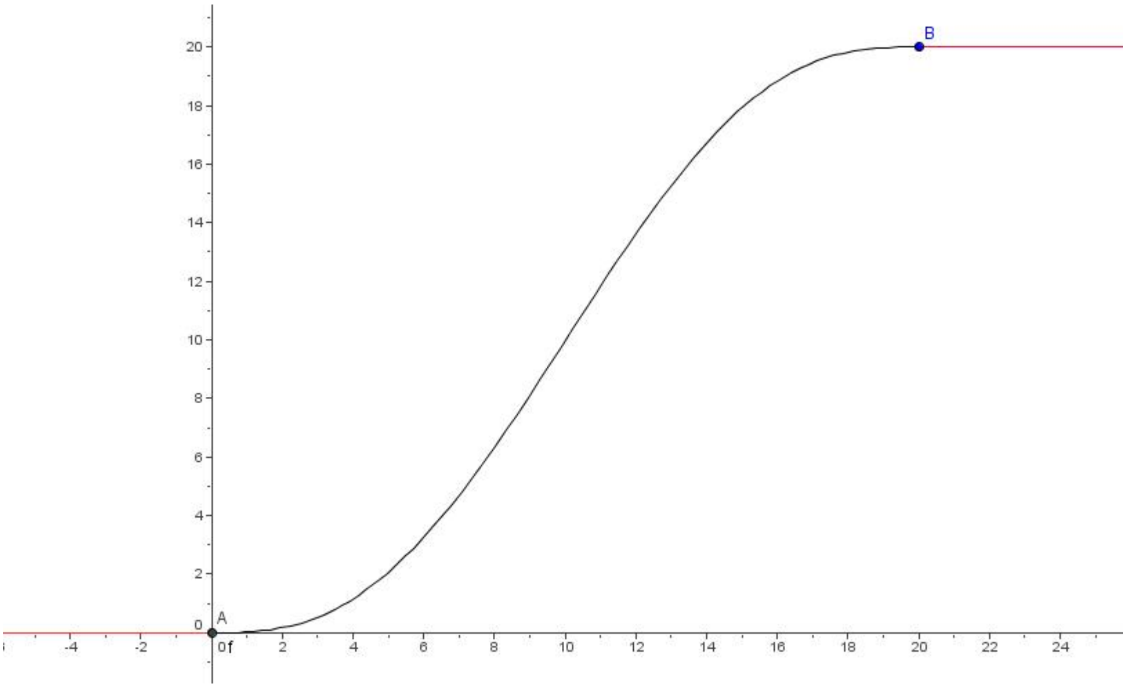
Legt man nun noch Wert auf die Länge der Trasse (um evtl. bei gegebener Straßenbreite die notwendigen Materialkosten berechnen zu können) errechnet sich diese durch:

$$B(x, a, b) := \int_0^a \sqrt{1 + f'(x, a, b)^2}\, dx$$

Beispielrechnung:

Gegeben sei ein 20*20 Meter Quadrat, also a=20m und b=20m.
Gesucht ist eine Kurve, die die beiden Straßenstümpfe verbindet.

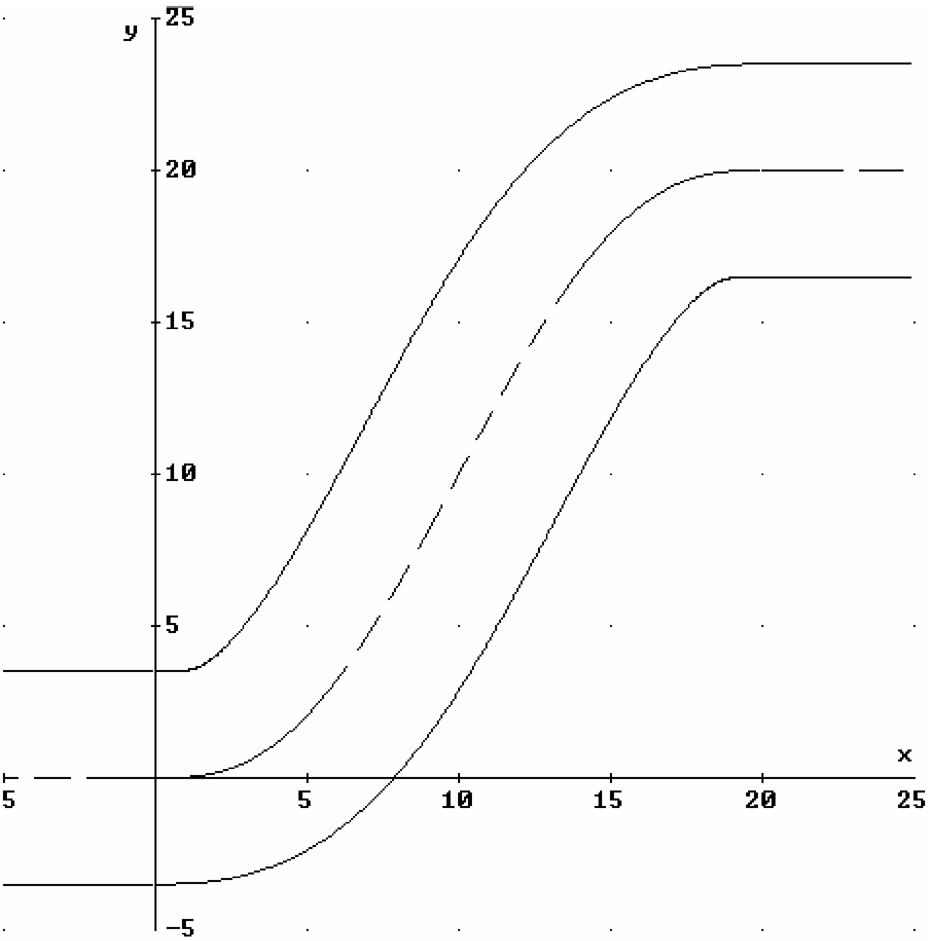
Das sähe dann so aus:



In diesem Fall beträgt der Betrag der Maximalkrümmung 0,2. Ein Auto könnte die Kurve also nur Durchfahren, wenn ihm ein Kreis mit 10m Durchmesser zum Wenden reicht und auch dann wäre noch das Geschwindigkeitsproblem gegeben. Man sieht also, dass für eine realistische Kurve ein größerer Straßenstumpfabstand als jeweils 20m nötig ist.

Errechnet man noch die Bogenlänge der Kurve kommt man auf ungefähr 34,6m.
Bei einer hypothetischen Straßenbreite von 7 m hätte man dann also 242,2m².
Bei durchschnittlichen Kosten von 100€/m² zahlt man für diese Straße knapp 25.000€.

Da in unserer Zeichnung bisher nur die Straßenmitte dargestellt ist, erstellen wir zwei zu f parallele Kurven, welche die Straße begrenzen.



Dabei verfuhren wir wie folgt:

- Erstellen einer Normalen durch jeden Punkt des Graphen.
- Kreis mit dem Radius der halben Straßenbreite durch jeden Punkt zeichnen.
- Schnittpunkte des Kreises und der Normalen sind Punkte der parallelen Kurve.

Da die Lösung dieses Problems sehr aufwendig ist, ist dazu die Verwendung einer Mathematiksoftware wie z.B. Derive nötig