

Die ägyptische Multiplikation

der folgende Text ist in großen Teilen entnommen aus: „Zahlentheorie für Einsteiger“, vieweg Verlag, 2003

Wie es funktioniert

Die alten Ägypter waren keine guten Mathematiker – jedenfalls im Vergleich zu den Babyloniern. Aber multiplizieren konnten sie dennoch, obwohl sie nur addieren konnten. Sie ersannen folgende raffinierte Methode. Wir wollen sie zunächst an einem Beispiel erklären. Es soll die Multiplikation $13 \cdot 21$ ausgeführt werden. Auf einem Papyrus fand man nun folgende Liste:

<i>prod</i>	<i>x</i>	<i>y</i>	<i>prod + x · y</i>
0	13	21	
13	13	20	
13	26	10	
13	52	5	
65	52	4	
65	104	2	
65	208	1	
273	208	0	
<u>273</u>			

Bevor Du weiter liest, lieber Leser, versuche selbständig herauszufinden, wie der ägyptische Schuljunge gerechnet hat. Es sieht sehr kompliziert aus. Vertiefe Dich etwas in die drei linken Spalten und Du wirst sicher bald mit dem Verfahren eine selbst gestellte Aufgabe lösen können. (Etwa $21 \cdot 13$)

Hier das Verfahren:

1. Zunächst werden in die Spalten x, y die beiden Faktoren geschrieben. In die Spalte *prod* schrieb der Ägypter die Zahl 0.
2. Ist y ungerade, so wird zu *prod* der Wert von x addiert und der Wert von y um 1 erniedrigt. x wird beibehalten.
3. Ist y gerade, so wird x mit 2 multipliziert und y durch 2 dividiert.
4. Das Verfahren wird so lange durchgeführt, bis sich $y = 0$ ergibt. In der Spalte *prod* wird dann das Ergebnis abgelesen.

Warum es immer funktioniert

Woher wissen wir, ob die Ägypter stets zum richtigen Ergebnis kamen? Dazu füllt man die rechte Spalte in obiger Tabelle gemäß der Anweisung $prod + x \cdot y$ aus und erkennt: $0 + 13 \cdot 21 = 13 + 13 \cdot 20 = 13 + 26 \cdot 10 = \dots = 273 + 208 \cdot 0$, das Ergebnis. Wen dieses Beispiel nicht davon überzeugen mag, dass die ägyptische Multiplikation immer das richtige Ergebnis liefert, der sehe sich folgende Argumentation genauer an.

Das Ergebnis der ägyptischen Multiplikation werde von der Funktion $aemul(a, b)$ geliefert. Dann gilt:

- $aemul(a, 0) = 0$ für alle $a \in \mathbb{N}$
- Ist b eine ungerade Zahl, so ist $aemul(a, b) := aemul(a, b-1) + a$
- Ist b eine gerade Zahl, so ist $aemul(a, b) := aemul(a \cdot 2, b/2)$

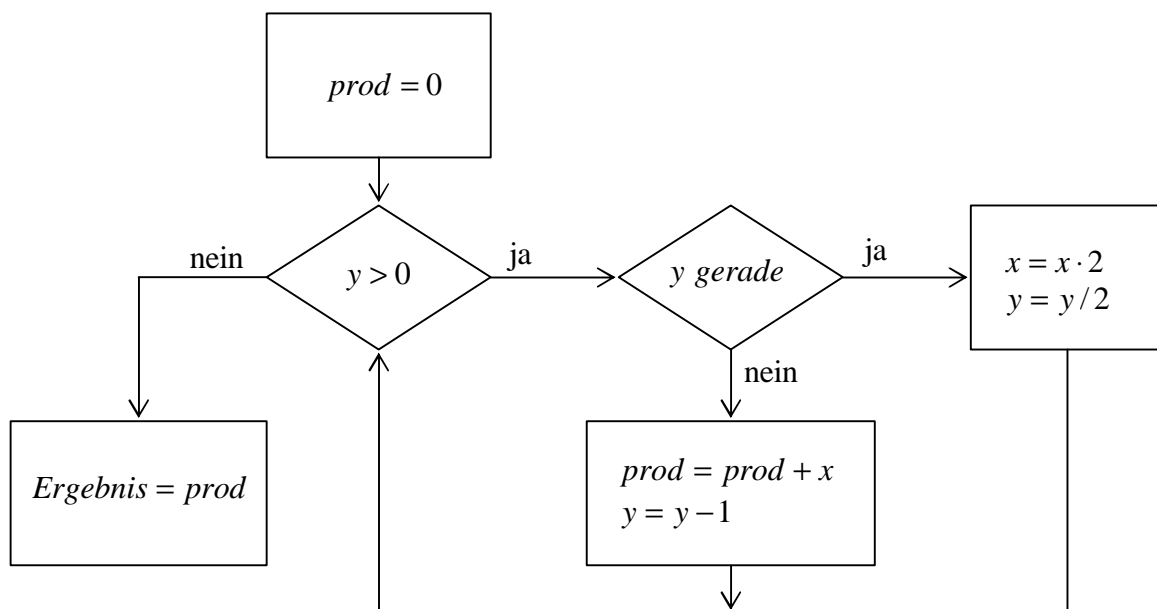
Dadurch ist für alle $b \in \mathbb{N}$ die Funktion $aemul(a,b)$ erklärt. Es ist für alle $a \in \mathbb{N}$ $aemul(a,1) = aemul(a,0) + a = a$. Angenommen, es gäbe irgend eine natürliche Zahl b , bei der die Ägypter ein anderes Ergebnis erhalten als wir. Dann gibt es auch ein kleinstes $b \in \mathbb{N}$. Wir zeigen nun, dass dies zu einem Widerspruch führt.

1. Fall: b ist ungerade.
Dann ist $aemul(a,b) = aemul(a,b-1) + a = a \cdot (b-1) + a = a \cdot b$, da $b-1 < b$.
2. Fall: b ist gerade.
Dann ist $aemul(a,b) = aemul(a \cdot 2, b/2) = (a \cdot 2) \cdot (b/2) = a \cdot b$, da $b/2 < b$.

Also erhalten die Ägypter für alle Zahlen das gleiche Multiplikationsergebnis wie wir.

Wie es mit dem Computer funktioniert

Nun soll die ägyptische Multiplikation in ein Programm mit ARIBAS umgesetzt werden. Dazu verdeutliche man sich noch einmal folgenden Ablauf:



Bemerkung: Diese Methode ist von prinzipiellem Interesse, da Computer sehr schnell addieren und verdoppeln bzw. halbieren können. Da sind sie Spezialisten. In der folgenden Übung werden wir das Verfahren variieren, um auch schnell potenzieren zu können.

1. Berechne auf einem Blatt Papier mittels ägyptischer Multiplikation $133 \cdot 212$.
2. Schreibe in ARIBAS die Funktion $aemul(x, y)$
3. Ersetzen wir im ägyptischen Multiplikationsalgorithmus Verdoppeln durch Quadrieren, Addieren durch Multiplizieren und 0 durch 1, so erhalten wir eine computereignete Möglichkeit, schnell zu potenzieren.
 - (a) Berechne mit dieser Methode $x^y = 3^7$.
 - (b) Schreibe in ARIBAS die Funktion $aepot(x, y)$ und teste sie.
 - (c) Versuche einen exakten Beweis für die Richtigkeit des Verfahrens.