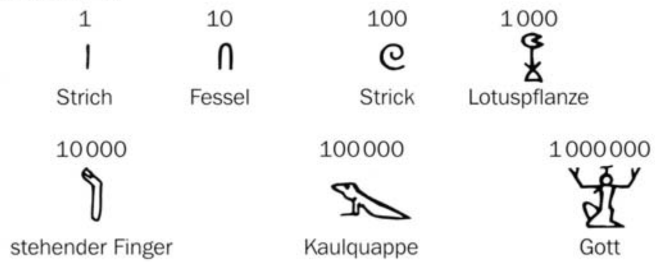
PROBLEMGESCHICHTE EINIGER MATHEMATISCHER TEILGEBIETE

§ 1 Zur Geschichte der Arithmetik

1.1 Die Zahlenschreibweise in vorgriechischer Zeit

Die frühen Hochkulturen hatten bereits systematisch aufgebaute Zahlenschriften. Denkt man daran, dass schon vor deren Entwicklung die Zahlen im Gespräch sicherlich auch veranschaulicht wurden, und bedenkt man, dass sich für diesen Vorgang zunächst einmal die Finger anbieten, dann erscheint es nicht verwunderlich, dass die meisten dieser Zahlenschriften dezimal aufgebaut sind.

Bereits in der Frühzeit der ägyptischen Hochkultur (um 3 000 v. Chr.) findet man Zahlzeichen in Hieroglyphenschrift, wobei es spezielle Symbole für die Zehnerpotenzen von 1 bis 1 000 000 gibt:



Mit Hilfe dieser Zahlensymbole wurden die einzelnen natürlichen Zahlen durch Aneinanderreihen angeschrieben, wobei man mit dem kleinsten notwendigen Symbol links begann und die Symbole für die höheren Potenzen rechts anfügte. Wir wollen bei unserer Darstellung aber mit dem größten Symbol beginnen und dann nach rechts die kleineren Symbole anfügen (wie wir das ja heute gewohnt sind). So würde etwa die Zahl 1 234 567 so dargestellt werden:

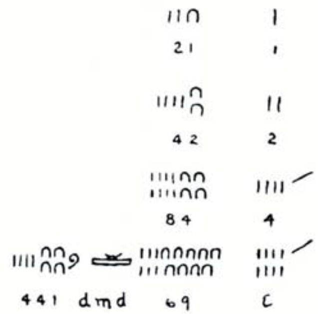
Im Laufe der Zeit wurde diese Schreibweise als zu lang empfunden, und man ging zu einer Produktdarstellung großer Zahlen über. So schrieb man etwa die Zahl 2 800 000 so an:

was soviel wie $28 \cdot 100\,000$ bedeutet.

Die Addition in diesem System bereitete keine Schwierigkeiten. Man brauchte nur abzuzählen, wie viele Einer, Zehner, Hunderter usw. dastehen. Analog ging man bei der Subtraktion vor. In dieser Zahlenschrift benötigte man auch kein Zeichen für die Null. Allerdings findet man auf dem Tempel von Edfu eine Inschrift, in der ein Zeichen für die Null verwen-

det wird. In dieser Inschrift aus dem zweiten Jahrhundert vor Christus wird angegeben, wie man die Fläche F von schmalen viereckigen Grundstücken berechnet. Bezeichnen wir die Seiten des Vierecks mit a, b, c und d, so läuft die Beschreibung der Flächenberechnung (in unserer modernen Schreibweise) auf die Formel $F = \frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}$ hinaus. Diese Formel ist natürlich (außer bei Rechtecken) falsch. Für dreieckige Grundstücke kann man das Verfahren aus der Inschrift durch die Formel $F = \frac{0+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}$ beschreiben. Die Multiplikation von (natürlichen) Zahlen führten die Ägypter durch fortgesetztes Verdoppeln und anschließendes Addieren der Ergebnisse durch. Dazu ein Beispiel:

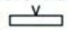
Im Papyrus Rhind tritt bei der Aufgabe 32 das Problem auf, das Produkt $12 \cdot 12$ zu berechnen:



Die hier in Hieroglyphenschrift dargestellte Vorgangsweise bei der Berechnung des Produktes ist also folgendermaßen:

Da $12 = 8 + 4$, bildet man eine Kolonne und kennzeichnet 4 und 8:

1	12
2	24
4*	48
8*	96

Die gewonnenen Ausdrücke für das 4- und 8-fache von 12 addiert man und erhält als Summe (dieses Wort wird gekennzeichnet durch die Hieroglyphe  = Buchrolle mit Siegel) 144.

Zur Ausführung der Division kehrten die Ägypter die Fragestellung einfach um und machten die Division zu einer Art Multiplikation. Um beispielsweise 753 durch 26 zu dividieren, schrieben sie eine Verdoppelungskolonne für 26 an:

1	26
2	52
4*	104
8*	208
16*	416

und zwar so lange, bis man durch weiteres Verdoppeln eine Zahl erhalten hatte, die den Dividend 753 überstieg. Es ist $753 = 416 + 337$, und 337 liegt zwischen dem 8-fachen und dem 16-fachen. Also erhält man die Zerlegung $753 = 416 + 208 + 129$. Nun wiederholt man den Vorgang und erhält:

$$753 = 416 + 208 + 104 + 25$$

Die dabei verwendeten Vielfachen wurden gekennzeichnet und $16 + 8 + 4 = 28$ ausgerechnet. Als Resultat erhielt man: Das Ergebnis der Division ist 28, und es bleibt ein Rest von 25.

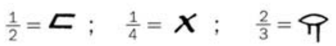
Diese Methode der Verdoppelung hat sich bis in die hellenistische Zeit gehalten und als „ägyptisches Rechnen" Eingang in den griechischen Schulunterricht gefunden. Nach dieser Methode musste man ja keine Multiplikationstafeln auswendig lernen. Obendrein war sie ideal für das Rechnen am Rechenbrett (Abakus) geeignet.

Wie wir schon früher ausgeführt haben, war die Mathematik der Ägypter aus praktischen Bedürfnissen entstanden und diente zur Bewältigung von Problemen des täglichen Lebens. Eine Beschreibung von Aufgaben, die mit Hilfe der Mathematik behandelt werden, gibt der Papyrus Anastasi I. Dort rügt ein Schreiber den anderen mit folgenden Worten (siehe [6]):

„Ich will dir darlegen, was dein Wesen ist, wenn du sagst: Ich bin der Befehlsschreiber des Heeres. Man gibt dir einen See auf, den du graben sollst. Da kommst du zu mir, um dich nach dem Proviant für die Soldaten zu erkundigen, und sagst: Rechne ihn mir aus. Du lässt dein Amt im Stich, und es fällt auf meinen Nacken ... Ich mache dich verlegen, wenn ich dir einen Befehl deines Herrn eröffne, der du ja ein königlicher Schreiber bist ... der erfahrene Schreiber, der an der Spitze des Heeres steht. Es soll eine Rampe gemacht werden, 730 Ellen lang und 55 Ellen breit, die 120 Kästen enthält und mit Rohr und Balken gefüllt ist; oben 30 Ellen hoch, in der Mitte 30 Ellen ... Man erkundigt sich nun bei den Generälen nach dem Bedarf an Ziegeln für sie, und die Schreiber sind allesamt versammelt, ohne dass einer unter ihnen etwas weiß. Sie vertrauen alle auf dich und sagen: Du bist ein erfahrener Schreiber, mein Freund; so entscheide das schnell für uns, sieh, du hast einen berühmten Namen ..."

Um alle auftretenden Probleme mathematisch bewältigen zu können, reichten die natürlichen Zahlen allein nicht aus. Man benötigte zusätzlich Brüche (also die positiven rationalen Zahlen). Zur Darstellung von Brüchen verwendeten die Ägypter nur Stammbrüche (also Brüche mit dem Zähler 1). Lediglich der Bruch $\frac{2}{3}$ war eine Ausnahme, und es gab dafür ein eigenes Symbol. Weiters gab es noch je ein eigenes Zeichen für $\frac{1}{2}$ und auch für $\frac{1}{4}$. Alle anderen Stammbrüche wurden durch Angabe des Nenners bezeichnet, über den man ein kleines ellipsenförmiges Zeichen setzte:

Sonderzeichen:



Für die Ausführung der Multiplikation durch fortgesetzte Verdoppelung benötigten die Ägypter die Zerlegung von Brüchen der Form $\frac{2}{n}$ in Stammbrüche. Dafür berechneten sie entsprechende Tafeln. Bevor im Papyrus Rhind auf die Behandlung von konkreten Aufgaben eingegangen wird, ist so eine Zerlegungstafel für $\frac{2}{n}$ in Stammbrüche für ungerade n von 5 bis 101 angegeben. Es gibt nur Vermutungen, warum die Ägypter gerade diese Zerlegungen ausgewählt hatten. Sicherlich wollte man eine geringe Gliederzahl der Stammbruchsumme erreichen, möglichst kleine Nenner im Hauptbruch und bei der Summe von mehr als zwei Gliedern große Nenner im letzten Restbruch. In jedem Fall wurde nur eine der möglichen Zerlegungen angegeben. So findet man etwa die Zerlegungen

$$\frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28};$$
$$\frac{2}{97} = \frac{1}{56} + \frac{1}{679} + \frac{1}{776};$$
$$\frac{2}{99} = \frac{1}{66} + \frac{1}{198}.$$

Durch die Verwendung von Brüchen kann man nun Divisionen ohne Rest ausführen. Die Aufgabe 24 aus dem Papyrus Rhind verlangt, man solle „mit 8 rechnen, bis man 19 findet". Es ist also die Division 19 durch 8 auszuführen. Dies wird auf folgende Weise gemacht:

1	8
2*	16
$\frac{1}{2}$	4
$\frac{1}{4}$*	2
$\frac{1}{8}$*	1

Da $19 = 16 + 2 + 1$ ist, erhält man als Quotienten $2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$.

Quelle: Geschichte der Mathematik, Oldenbourg Verlag,2002, ISBN 3-48-111595-2